SISTEME DE PRELUCRARE GRAFICĂ
CURS 12-13

10. Modelarea şi redarea suprafeţelor parametrice

10.1 Curbe de formă liberă

Curbele de formă liberă sunt curbe cunoscute nu prin ecuaţii ci prin formele lor. Sunt folosite în proiectare, arhitectură, animaţie, reprezentarea formei caracterelor de text, în recunoaşterea formelor din imagini, etc.

Curbele de formă liberă sunt de două tipuri:

- **curbe de interpolare** – curba trece prin toate punctele date;
- **curbe de aproximare** – curba căutată nu trece prin toate punctele. În acest caz punctele date se numesc *puncte de control*.

În activităţile de concepţie sunt folosite mai ales curbele de aproximare, deoarece ele nu impun cunoaşterea exactă a formei obiectului conceput. Sistemele de proiectare a curbelor de formă liberă (şi a suprafeţelor de formă liberă) permit controlul interactiv al formei unei curbe prin deplasări fine ale punctelor de control.

Dintre curbele de aproximare, cele mai folosite sunt curbele Bézier şi B-spline, iar dintre suprafeţele de aproximare: suprafeţele Bézier şi B-spline.

10.1.1. Curbe Bèzier

Curbele Bèzier sunt curbe de aproximare. Ele au fost definite de matematicianul Bézier, care a urmărit obţinerea unei formulări matematice pentru curbe determinate prin mai multe puncte, uşor de folosit în proiectarea asistată de calculator. Rezultatele lui Bézier au fost folosite la proiectarea suprafeţelor caroseriilor maşinilor Renault.

Bézier a pornit de la condiţia ca un segment de curbă să fie determinat exclusiv de un set de puncte, deci, orice punct de pe curbă să poată fi obţinut prin evaluarea unui polinom de forma:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i \, f_i(u), \qquad 0 \le u \le 1, \qquad (10.1)$$

unde: P_i sunt punctele date, numite şi *puncte de control* ale curbei.

Funcţiile $f_i(u)$ au fost alese astfel încât să îndeplinească următoarele cerinţe:

1) Curba să treacă prin primul şi ultimul punct de control (P_0 şi P_n);
2) Vectorul tangent la curbă în primul punct să fie dat de segmentul P_1P_0, iar în ultimul punct de segmentul P_nP_{n-1};
3) Cerinţa (2) să fie îndeplinită şi pentru derivatele de ordin superior, deci derivata de ordin 2 în P_0 să fie determinată de punctele P_0, P_1, P_2, iar în P_n de punctele P_{n-2},

P_{n-1}, P_n. În general, derivata de ordin m într-unul din punctele extreme să fie determinată de m puncte consecutive.

4) Funcţiile $f_i(u)$ să fie simetrice în raport cu u şi $(1-u)$, adică secvenţa punctelor să poată fi inversată fără ca forma curbei să fie afectată.

Funcţiile care îndeplinesc cerinţele anterioare se numesc *funcţii de amestec* (blending functions) sau *funcţii de ponderare* sau *funcţii de bază* pentru curbele Bézier. Drept funcţii de amestec pentru curbele Bézier au fost alese polinoamele Bernstein. Deci expresia polinomială a curbelor Bézier este următoarea (expresie vectorială):

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(u), \qquad 0 \le u \le 1, \tag{10.2}$$

unde

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} = C_n^i u^i (1-u)^{n-i}. \tag{10.3}$$

În relaţiile anterioare n reprezintă gradul curbei, respectiv gradul polinoamelor Bernstein. Se observă că pentru funcţii de bază de grad n este nevoie de $n+1$ puncte de control. De asemenea, din relaţia (10.1) rezultă că în cazul în care cele $n+1$ puncte de control coincid, funcţiile de amestec trebuie să îndeplinească relaţia:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(u) = 1. \tag{10.4}$$

Curbe Bézier cubice

Curbele Bézier cubice sunt curbe parametrice de grad 3 în care se folosesc *patru* puncte de control P_0, P_1, P_2, P_3. Curba trece prin primul şi ultimul punct şi este tangentă la primul şi ultimul segment de control (fig. 10.1).

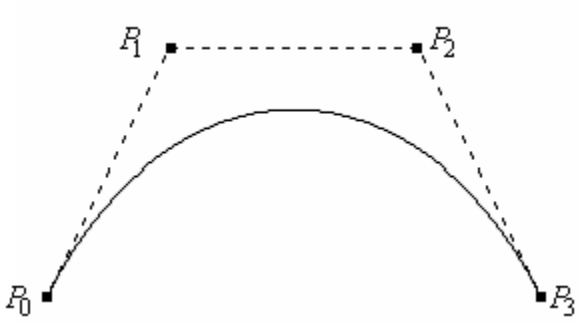

Fig. 10.1 Curbă Bézier cubică

Funcţiile de bază folosite pentru determinarea curbei (funcţiile de amestec) au expresiile (vezi relaţiile (10.3)):

$$\begin{aligned} &B_{0,3}(u) = (1-u)^3, \\ &B_{1,3}(u) = 3u(1-u)^2, \\ &B_{2,3}(u) = 3u^2(1-u), \\ &B_{3,3}(u) = u^3. \end{aligned} \qquad u \in [0,1] \qquad (10.5)$$

Expresia polinomială a curbelor Bézier este următoarea (expresie vectorială):

$$Q(u) = P_0(1-u)^3 + 3P_1u(1-u)^2 + 3P_2u^2(1-u) + P_3u^3 . \qquad (10.6)$$

În cazul în care cele patru puncte coincid $P_0 \equiv P_1 \equiv P_2 \equiv P_3 \equiv P$ rezultă:

$$Q(u) = P\,[(1\text{-}u) + u]^3 = P\,, \text{ adică } \sum_{i=0}^{3} B_{i,3}(u) = 1\,. \qquad (10.7)$$

Reamintim că P_0, P_1, P_2 şi P_3 se numesc puncte de control, deoarece poziţia lor în spaţiu influenţează forma curbei. Poligonul obţinut prin unirea punctelor succesive se numeşte *poligon de control* sau *poligon caracteristic*.

În continuare determinăm vectorii tangenţi la curba Bézier, derivând curba în raport cu parametrul u. Din relaţia (10.6) rezultă:

$$Q_u(u) = -3P_0(1-u)^2 + 3P_1(1-u)^2 - 6P_1u(1-u) + 6P_2u(1-u) - 3P_2u^2 + 3P_3u^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$Q(u) = 3(P_1 - P_0)(1-u)^2 + 6(P_2 - P_1)u(1-u) + 3(P_3 - P_2)u^2 . \qquad (10.8)$$

Prin urmare vectorii tangenţi la curbă în capetele ei sunt:

$$\begin{aligned} &Q_u(0) = 3(P_1 - P_0) \\ &Q_u(1) = 3(P_3 - P_2) \end{aligned}. \qquad (10.9)$$

Din aceste relaţii rezultă că punctele P_0 şi P_1 se află pe tangenta în curbă în P_0, iar P_3 şi P_2 se află pe tangentă în curbă în P_3, deci curba este tangentă la primul şi ultimul segment (fig. 10.1) .

În figura 10.2 se reprezintă curbele Bézier modificând punctul de control P_1, iar în figura 10.3 funcţiile de amestec Bézier.

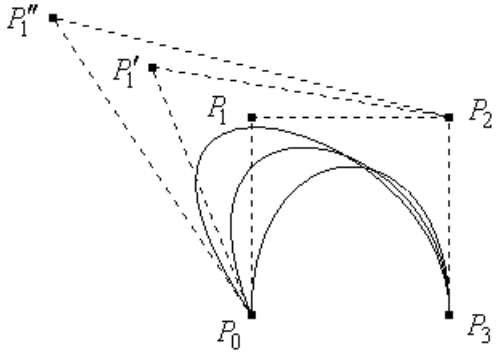

Fig. 10.2 Curbe Bézier şi poligoanele caracteristice

Din figura 10.2 se observă că modificând un punct de control (P_1 în figură) se modifică toată curba (acesta este principalul dezavantaj).

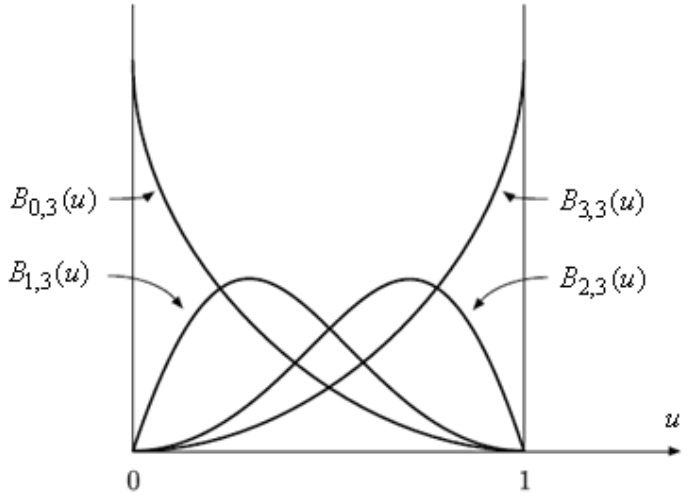

Fig. 10.3 Funcţiile de amestec Bézier cubice

În relaţiile anteriore s-a folosit forma vectorială pentru curbele Bézier. O notaţie mai simplă se obţine prin utilizarea formei matriciale. În acest scop relaţia (10.6) o rescriem:

$$Q(u) = B_{0,3}P_0 + B_{1,3}P_1 + B_{2,3}P_2 + B_{3,3}P_3 . \qquad (10.10)$$

Notăm vectorul determinat de funcţiile Bézier cu $F_B(u)$ şi deci:

$$F_B(u) = \begin{bmatrix} B_{0,3}(u) & B_{1,3}(u) & B_{2,3}(u) & B_{3,3}(u) \end{bmatrix}. \qquad (10.11)$$

În relaţia (10.11) înlocuim funcţiile de amestec şi obţinem:

$$F_B(u) = \begin{bmatrix}(1-u)^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & u^3\end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix}-u^3+3u^2-3u+1 & 3u^3-6u^2+3u & -3u^3+3u^2 & u^3\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$F_B(u) = \begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = U \cdot M_B, \qquad (10.12)$$

unde

$$M_B = \begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (10.13)$$

este *matricea de bază Bézier* şi U este vectorul:

$$U = \begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}. \qquad (10.14)$$

Deci *forma matricială* pentru segmentul de curbă Bézier este:

$$\boxed{Q(u) = U \cdot M_B \cdot G_B}, \qquad (10.15)$$

în care

$$G_B = \begin{bmatrix}P_0 & P_1 & P_2 & P_3\end{bmatrix}^T \qquad (10.16)$$

reprezintă *vectorul condiţiilor geometrice* (polinomul de control).

Avantajele folosirii curbelor Bézier în proiectarea asistată de calculator sunt:

a) poligonul de control permite stabilirea formei iniţiale a curbei şi apoi modificarea curbei acţionând asupra vârfurilor poligonului;
b) curba are extremităţile în primul şi ultimul punct de control;
c) tangentele în punctele extreme sunt chiar primul şi ultimul segment al poligonului de control;
d) curba este cuprinsă în întregime în figura convexă determinată de vârfurile poligonului de control (proprietatea „*convex hull*") şi în general are forma poligonului;
e) proiectantul nu trebuie să specifice tangentele la curbă ci numai punctele din plan sau spaţiu;
f) curbele mai complexe se pot obţine prin alipirea mai multor segmente folosind continuitatea poziţională (de ordin 0) şi continuitatea tangenţială (de ordin 1).

Dezavantajele rezultă din folosirea polinoamelor Bernstein ca funcţii de amestec:

a) pentru n puncte de control gradul curbei este $(n-1)$, ceea ce implică un timp de execuţie mare;
b) polinoamele Bernstein sunt diferite de zero pe întreg intervalul de definiţie al curbei ($u \in [0,1]$), deci fiecare punct de pe curbă depinde de toate punctele de control, de

aceea deplasarea unui vârf influenţează întreaga curbă (se spune că nu are proprietatea de control local). Acest efect poate fi observat examinând figura 10.2.

10.1.2 Curbe B-spline

Curbele B-spline sunt, ca şi curbele Bézier, curbe de aproximare. Spre deosebire de curbele Bézier ele sunt descrise prin funcţii polinomiale *definite pe porţiuni*, ceea ce le conferă proprietatea de *control local*. Segmentele de curbă B-spline sunt descrise de obicei prin polinoame de grad 2 sau 3, gradul fiind independent de numărul punctelor de control.

Curbele B-spline sunt definite analitic prin ecuaţia vectorială următoare:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot B_{i,k}(u) \,, \tag{10.17}$$

unde P_i, $i = \overline{0,n}$ sunt puncte de control şi $B_{i,k}(u)$ sunt funcţii de amestec B-spline de grad $k-1$ şi ordin de continuitate $k-2$.
Funcţiile B-spline se definesc recursiv astfel:

$$B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{pentru} \quad u_i \le u \le u_{i+1} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \tag{10.18}$$

$$B_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} B_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} B_{i+1,k-1}(u) \,. \tag{10.19}$$

De exemplu, pentru $B_{i,2}(u)$ obţinem:

$$B_{i,2}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} B_{i,1}(u) + \frac{u_{i+2} - u}{u_{i+2} - u_{i+1}} B_{i+1,1}(u) \,,$$

adică

$$B_{i,2}(u) = \begin{cases} \dfrac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} & \text{pentru} \quad u_i \le u \le u_{i+1}, \\ \dfrac{u_{i+2} - u}{u_{i+2} - u_{i+1}} & \text{pentru} \quad u_{i+1} \le u \le u_{i+2}. \end{cases} \tag{10.20}$$

Se observă că $B_{i,2}(u)$ este nenulă pe două intervale consecutive. Din relaţiile de definiţie (10.18) şi (10.19) rezultă că o funcţie B-spline $B_{i,k}$ este nenulă numai pe k intervale consecutive.

Valorile u_i se numesc *valori nodale* sau *noduri* (knots). Valorile nodale trebuie să formeze o secvenţă monoton crescătoare $u_i \le u_{i+1}$. Acestea realizează divizarea domeniului de definiţie a variabilei globale u (pentru întreaga curbă) în subintervale. Aceste valori specifică valoarea parametrului u de la care o funcţie B-spline devine inactivă şi o alta activă. Pot fi valori reale sau întregi (din domeniul de definiţie al lui u). Dacă u_i sunt egal distanţate, spunem că vectorul pe care îl formează este uniform, iar funcţiile B-spline sunt uniforme.

Pentru o curbă B-spline deschisă, vectorul uniform al valorilor nodale (nodurilor) este definit astfel:

$$\begin{cases} u_i = 0 & \text{pentru } i < k, \\ u_i = i - k + 1 & \text{pentru } k \le i \le n, \\ u_i = n - k + 2 & \text{pentru } i > n, \end{cases} \qquad (10.21)$$

unde $0 \le i \le n + k$.

Deci în cazul curbelor B-spline uniforme $B_{i,k}(u)$ de grad $k-1$ avem $n+k+1$ *valori nodale*. Din relaţiile (10.21) rezultă că domeniul de definiţie al variabilei parametrice (variabilă nenormată) este:

$$0 \le u \le n - k + 2 . \qquad (10.22)$$

Curbe B-spline cubice uniforme

În cazul curbelor B-spline cubice uniforme avem $k = 4$ ($k - 1 = 3$ – gradul curbei) şi ordinul de continuitate este $k - 2 = 2$. Din relaţiile de definiţie a funcţiilor de amestec (relaţiile (10.18) şi (10.19)) rezultă că pentru $k = 4$ obţinem 4 funcţii B-spline, care vor fi diferite de zero pe 4 intervale. Aceste funcţii vor constitui o bază cu care se construieşte fiecare segment al curbei, respectiv toată curba.

Pentru o secvenţă de puncte de control P_i, ecuaţia segmentului $Q_i(u)$ al unei curbe B-spline este (ecuaţie vectorială):

$$Q_i(u) = \sum_{j=0}^{3} P_{i-3+j} B^c_{i-3+j}(u), \qquad (10.23)$$

unde: - i reprezintă numărul segmentului de curbă, $i \ge 3$;
- j este indexul punctului de control local, adică este indexul pentru segmentul i;
- $u \in [0,1]$ în cazul segmentului dat (variabila u este normată).

Funcţiile cubice B-spline B^c_{i-3+j} se obţin din relaţiile (10.18) şi (10.19). Considerăm variabila u normată pe intervalul de definiţie şi atunci expresiile funcţiilor B-spline cubice sunt:

$$\begin{aligned} B^c_{i-3}(u) &= \frac{1}{6}(1-u)^3, \\ B^c_{i-2}(u) &= \frac{1}{6}\left(3u^3 - 6u^2 + 4\right), \qquad u \in [0,1], \\ B^c_{i-1}(u) &= \frac{1}{6}\left(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1\right), \\ B^c_{i}(u) &= \frac{1}{6}u^3. \end{aligned} \qquad (10.24)$$

Reprezentarea grafică a acestor funcţii pe intervalul [0,1] este dată în figura 10.4.

Segmentul de curbă $Q_i(u)$ al unei curbe B-spline poate fi scris şi sub forma matricială. Din relaţia (10.23) rezultă:

$$Q_i(u) = \left[B_{i-3}^c(u), \quad B_{i-2}^c(u), \quad B_{i-1}^c(u), \quad B_i^c(u)\right] \cdot \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix} \qquad (10.25)$$

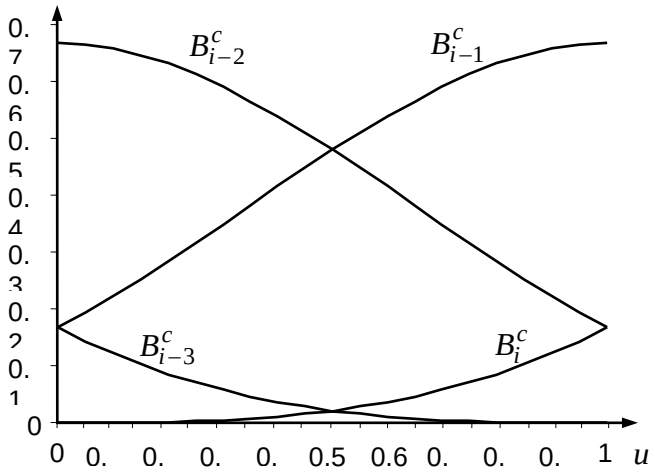

Fig. 10.4 Funcţiile de amestec B-spline cubice

Înlocuind funcţiile de bază în relaţia (10.25) obţinem:

$$Q_i(u) = \frac{1}{6}\left[1\text{-}3u + 3u^2\text{-}u^3, \quad 3u\text{-}6u^2 + 3u^3, \quad 1 + 3u + 3u^2\text{-}3u^3, \quad u^3\right] \cdot \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Q_i(u) = \left[u^3, \quad u^2, \quad u, \quad 1\right] \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix} \qquad (10.26)$$

sau

$$\boxed{Q_i(u) = U \cdot M_S \cdot G_S}, \qquad (10.27)$$

în care

$$G_S = \left[P_{i-3} \quad P_{i-2} \quad P_{i-1} \quad P_i\right]^T \qquad (10.28)$$

reprezintă vectorul condiţiilor geometrice.

O curbă B-spline cubică este compusă din $n-2$ segmente, notate Q_3, Q_4, ..., Q_n, controlate de $n+1$ puncte de control P_0, P_1, ..., P_n ($n \geq 3$). Fiecare segment al curbei este definit de 4 puncte de control, iar fiecare punct de control influenţează numai 4 segmente de curbă. Aceasta este proprietatea de control local al curbelor B-spline.

Un segment de curbă B-spline prezintă continuitate de ordin 0, 1 şi 2. Curba totală, care este compusă din cele $n-2$ segmente, are ecuaţia (vezi relaţia (10.17)):

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,4}(u). \tag{10.29}$$

În relaţia anterioară i este numărul unui punct de control, deci $i = \overline{0,n}$.

Funcţia B-spline $B_{i,4}(u)$ este diferită de zero pe 4 subintervale şi are expresia:

$$B_{i,4}(u) = \begin{cases} B_i^c(u) = \dfrac{1}{6}u^3, & 0 \leq u \leq 1 \\ B_{i-1}^c(u-1) = \dfrac{1}{6}\left[-3(u-1)^3 + 3(u-1)^2 + 3(u-1) + 1\right], & 1 \leq u \leq 2 \\ B_{i-2}^c(u-2) = \dfrac{1}{6}\left[3(u-2)^3 - 6(u-2)^2 + 4\right], & 2 \leq u \leq 3 \\ B_{i-3}^c(u-3) = \dfrac{1}{6}\left[1-(u-3)^3\right] & 3 \leq u \leq 4 \end{cases} \tag{10.30}$$

În această relaţie s-a considerat cazul funcţiilor B-spline uniforme şi s-au notat cele patru intervale $u_i \leq u \leq u_{i+1}$, $u_{i+1} \leq u \leq u_{i+2}$, $u_{i+2} \leq u \leq u_{i+3}$, $u_{i+3} \leq u \leq u_{i+4}$ prin $0 \leq u \leq 1$, $1 \leq u \leq 2$, $2 \leq u \leq 3$, $3 \leq u \leq 4$. Graficul pentru funcţia $B_{i,4}(u)$ este reprezentat în figura 10.5.

Din relaţiile de definiţie (10.18), (10.19) şi din relaţiile (10.30) se observă că, în cazul unor funcţii B-spline uniforme, fiecare funcţie este o copie translată a unei funcţii de bază. De exemplu:

$$B_{i+1,4}(u) = B_{i,4}(u-1),$$

$$B_{i+2,4}(u) = B_{i,4}(u-2),$$

$$B_{i+3,4}(u) = B_{i,4}(u-3), \text{ etc.}$$

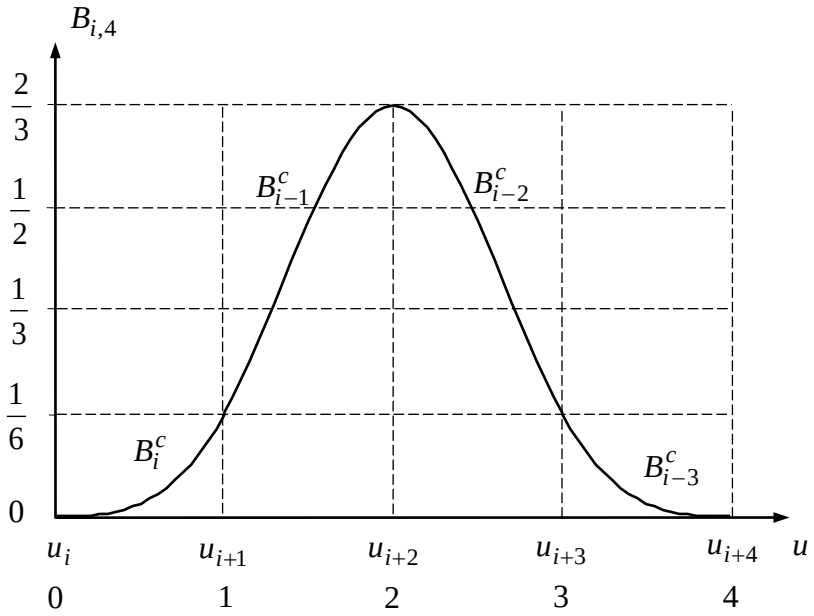

Fig. 10.5 Funcţia B-spline $B_{i,4}(u)$

În figura 10.6 este reprezentat un singur segment de curbă B-spline, uniformă, definit de 4 puncte de control şi de 4 funcţii de bază $B_{0,4}(u)$, $B_{1,4}(u)$, $B_{2,4}(u)$, $B_{3,4}(u)$.

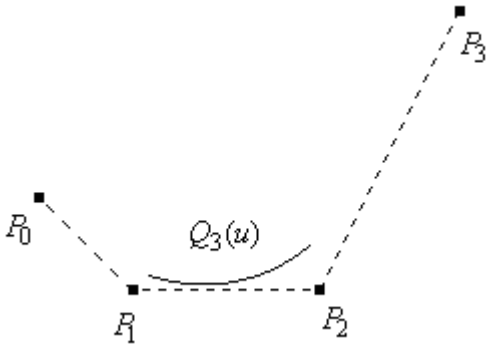

Fig. 10.6 Segment de curbă B-spline

În figura 10.7 este reprezentată o curbă B-spline uniformă, compusă din trei segmente.

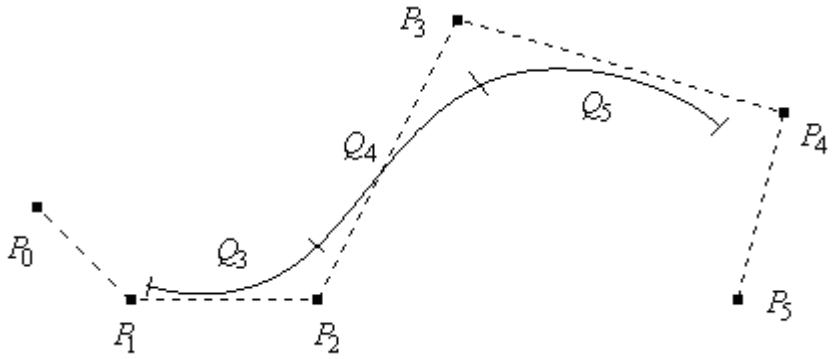

Fig. 10.7 Curbă B-spline uniformă compusă din 3 segmente

Se observă că, spre deosebire de curbele Bezier, curbele B-spline unifome nu interpolează punctele de control de la capete.

În cazul unui segment, avem numai 4 puncte de control P_0, P_1, P_2 şi P_3. Numărul de noduri (valori nodale) este $n+k+1=n+5=8$. Reprezentăm aceste 8 noduri şi analizăm intervalele pe care sunt active funcţiile de bază $B_{0,4}$, $B_{1,4}$, $B_{2,4}$, $B_{3,4}$ (fig. 10.8).

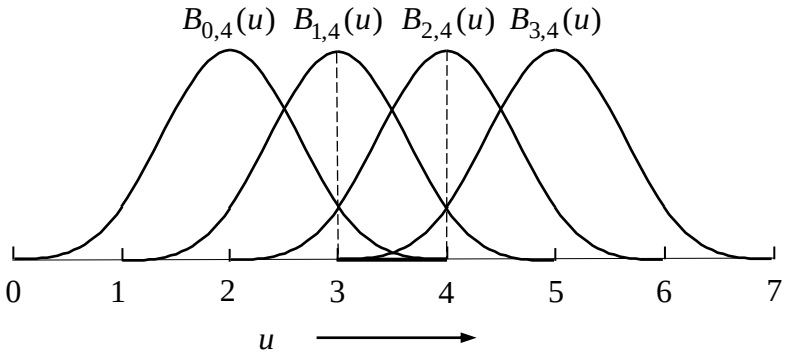

Fig. 10.8 Funcţiile de bază B-spline uniforme pentru un segment

În intervalul de definiţie $[u_i, u_{i+1}]$ (intervalul corespunzător lui $[3,4]$ din fig. 10.8) al unui segment de curbă sunt active patru funcţii de bază iar suma lor este egală cu 1, celelalte funcţii nu mai contribuie la obţinerea segmentului respectiv (fig. 10.8). Curba B-spline din figura 10.6 (compusa dintr-un singur segment Q_3) are expresia:

$$Q(u) = P_0\, B_{0,4}(u) + P_1\, B_{1,4}(u) + P_2\, B_{2,4}(u) + P_3\, B_{3,4}(u)\,. \qquad (10.31)$$

Curba din figura 10.7, dată prin 6 puncte de control ($n=5$), este compusă din 3 segmente şi are ecuaţia:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{5} P_i B_{i,4}(u) . \qquad (10.32)$$

Deoarece $n = 5$, numărul valorilor nodale este $n + k + 1 = n + 5 = 10$. Funcţiile de bază B-spline uniforme pentru o curbă compusă din trei segmente sunt reprezentate în figura 10.9.

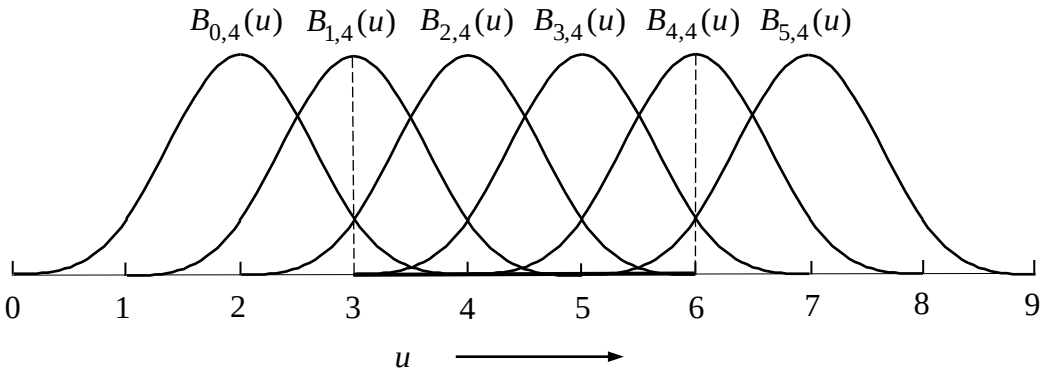

Fig. 10.9 Funcţiile de bază B-spline uniforme pentru o curbă formată din 3 segmente

Din cele prezentate anterior deducem că punctele nodale u_i sunt puncte de adiacenţă între funcţiile de bază $B_{i,4}$. Ele specifică valoarea parametrului u de la care o funcţie devine inactivă şi alta activă. Pentru un segment se folosesc 4 funcţii de bază, fiecare funcţie fiind activă pe 4 intervale ale parametrului u. Un segment este definit peste 8 noduri. Pentru o curbă ce conţine $n - 2$ segmente, avem $n + 5$ noduri.

Principalul dezavantaj al curbelor B-spline uniforme este că nu interpolează punctele de control de la capete.

Curbe B-spline cubice neuniforme

O curbă B-spline neuniformă este o curbă în care intervalele parametrice (ale lui u) între două noduri succesive nu sunt neapărat egale. Acest lucru înseamnă că funcţiile de amestec nu mai sunt translate una faţă de cealaltă, ci variază de la un interval la altul. Forma obişnuită a curbelor B-spline neuniforme este aceea în care unele intervale între noduri sunt nule, adică nodurile sunt multiple. Faptul acesta permite interpolarea tuturor punctelor de control (capete sau intermediare).

Curbele din figurile 10.6 şi 10.7 sunt curbe B-spline uniforme, deoarece nodurile sunt dispuse uniform pe axa parametrului u, valorile lor fiind: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} pentru un segment şi {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9} pentru o curbă formată din trei segmente. Putem modifica poziţia nodurilor pe axa lui u, astfel încât să interpolăm, de exemplu, punctele de control de la capete. Interpolarea este asigurată prin multiplicitatea nodurilor. Pentru curba din figura 10.10a valorile nodale sunt {0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1}, iar pentru cea din figura 10.10b valorile nodale sunt {0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3}.

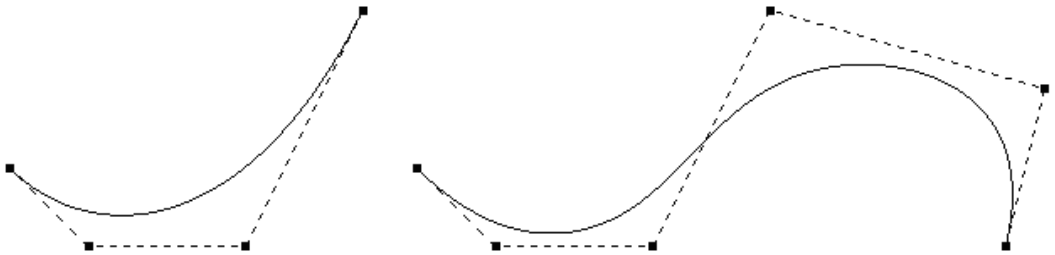

Fig. 10.10 Curbe B-spline neuniforme: a) cu 4 puncte de control; b) cu 6 puncte de control

Curba din fig. 10.10a este de fapt o curbă Bezier. Deci curbele Bezier sunt cazuri particulare ale curbelor B-spline.

Observaţie. Dacă valorile nodale u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3} sunt identice curba trece prin punctul i.

Proprietăţi ale curbelor B-spline

1. *Puncte de control multiple.*

O curbă B-spline de grad m trece întotdeauna printr-un punct de control de multiplicitate m. Deci se poate forţa trecerea unei curbe B-spline printr-un punct de control introducând punctul respectiv în vectorul punctelor de control pe mai multe poziţii succesive.

2. *Puncte de control coliniare*.

Dacă $m+1$ puncte de control succesive sunt situate pe o dreaptă, atunci curba B-spline de grad m va fi situată parţial pe dreapta respectivă.

3. *Curbe închise*.

Pentru a obţine o curbă B-spline de grad m închisă este suficient ca primele m puncte de control să fie identice cu ultimele m.

4. *Proprietatea de închidere convexă (convex hull)*.

Orice curbă B-spline este complet inclusă în poligonul convex format prin unirea punctelor de control.

5. *Invarianţa afină*.

Pentru a transforma o curbă B-spline este suficient să se aplice transformarea (afină) punctelor de control şi apoi să se regenereze curba. Această proprietate o au şi curbele Bézier.

10.2 Suprafeţe de aproximare

Suprafeţe Bézier

Se extinde reprezentarea parametrică a curbelor Bézier la reprezentarea peticelor de suprafeţe parametrice. De exemplu, considerând curbe Bézier cubice, un petic de suprafaţă bicubică Bézier este definit prin ecuaţiile:

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} P_{ij} B_i(u) B_j(v), \qquad (10.33)$$

unde P_{ij} sunt puncte de control şi $B_i(u)$, respectiv $B_j(u)$, sunt funcţii de bază. Un petic Bézier este definit prin 16 puncte de control, care formează o suprafaţă de control numită *poliedru caracteristic*. Proprietăţile curbelor Bézier se extind la suprafeţele Bézier.

Suprafeţe B-spline

Un petic bicubic B-spline are ecuaţia:

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} P_{ij} B_{ij}(u,v), \qquad (10.34)$$

în care $B_{ij}(x)$ este o funcţie de bază de două variabile u şi v, care poate fi:

$$B_{ij}(u,v) = B_{i,4}(u) B_{j,4}(v). \qquad (10.35)$$

Suprafeţe complexe se obţin din mai multe segmente de petice alăturate, prin extinderea poliedrului caracteristic şi a tabloului nodurilor.

10.3 Extinderea controlului parametric: curbele şi suprafeţele NURBS

Unele extinderi importante ale curbelor şi suprafeţelor B-spline permit controlul formei atât prin poziţia punctelor de control cât şi prin alţi parametri.

Curbele şi suprafeţele B-spline neuniforme raţionale (NURBS - Non Uniform Rational B-Spline) extind curbele şi suprafeţele B-spline neuniforme prin adăugarea unui parametru suplimentar fiecărui punct de control. Fiecare punct de control se reprezintă într-un sistem cu 4 coordonate, coordonata suplimentară w fiind un parametru care ponderează efectul fiecărui punct de control:

$$P_i = \left(w_i x_i,\quad w_i y_i,\quad w_i z_i,\quad w_i\right) \qquad (10.36)$$

O curbă B-spline raţională este definită prin ecuaţia vectorială:

$$Q(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} P_i w_i B_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,k}(u)} = \sum_{i=0}^{n} P_i R_{i,k}(u) \ , \qquad (10.37)$$

unde

$$R_{i,k} = \frac{w_i B_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,k}(u)} . \qquad (10.38)$$

Se observă că pentru $w_i = 1$, deoarece $\sum_{i=0}^{n} B_{i,k}(u) = 1$, se obţine o curbă B-spline neraţională.